偏微分法（多変数関数の最大・最小）

多変数の関数の微分法について

2 変数 x, y の関数 $f(x, y)=x^2-2xy+3y^2-4x+6y+3$ を例として考えてみよう。

x, y がすべての実数値をとって変化するとき，関数 $f(x, y)$の最小値は次のように求められる。

$z=x^2-2xy+3y^2-4x+6y+3$ とおくと，

$$z=x^2-2(y+2)x+3y^2+6y+3=\left\{x-(y+2)\right\}^2-(y+2)^2+3y^2+6y+3$$

$$=\left\{x-(y+2)\right\}^2+2y^2+2y-1=\left\{x-(y+2)\right\}^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

$x=y+2$ かつ $y=-\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $x=\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{2}$.

この解法では，最初は y を定数と見て x についての関数と考えている。つまり，変数 x に対する z の増減を考えている。多変数関数を扱うときには，この考え方が重要である。このことは，$y=y_0$ とし，$z=x^2-2(y_0+2)x+3{y_0}^2+6y_0+3$ を x について微分して，$z'=2x-2(y_0+2)$ を考えることと同じである。微分では，y を固定して定数とみなし，x について微分することを x で**偏微分する**といい，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$f_x(x, y)$ などと表す。y についての偏微分も同様に定義される。$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を**偏導関数**という。関数 $f(x, y)$の偏導関数は

$f_x(x, y)=2x-2y-4x$，　$f_y(x, y)=-2x+6y+6$ である。

一般には，偏微分係数は

$$f_x(x_0,\ y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h},\qquad f_y(x_0,\ y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k},$$

で定義される。

偏微分とは，微分係数を x 軸方向の微分係数と y 軸方向の微分係数に分けて考えているのである。$z=x^2-2xy+3y^2-4x+6y+3$ のグラフ（楕円放物面）を考えると，平面 $y=y_0$による切り口の放物線（2 次関数）についての微分係数を求めることである。

$z=0$ とすると，$x^2-2xy+3y^2-4x+6y+3=0$ が得られる。これは，楕円放物面 $z=x^2-2xy+3y^2-4x+6y+3$ と xy 平面との交わりの楕円を表している。

y を x の陰関数とみて微分すると，

$2x-2(y+xy')+6yy'-4+6y'=0$ より，$y'=\dfrac{x-y-2}{x-3y-3}$ となる。

これを偏導関数を用いて表すと

$y'=-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ となる。

$z=x^2-2xy+3y^2-4x+6y+3$ のグラフ